Konstrukce $\mathbb{Z}$

- Uvažujeme množinu $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$
- Definovali jsme relaci na $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$$(a,b)\sim(c,d) \overset{def}{\iff} a+d=b+c$$

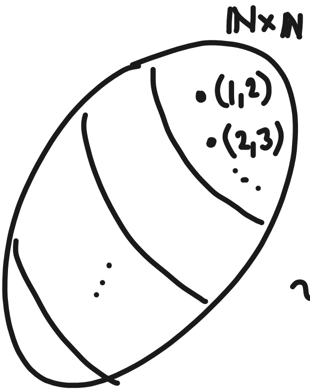
$$\ulcorner a-b = c-d \lrcorner$$

„reprezentují stejná čísla"

Víme, že je to ekvivalence.

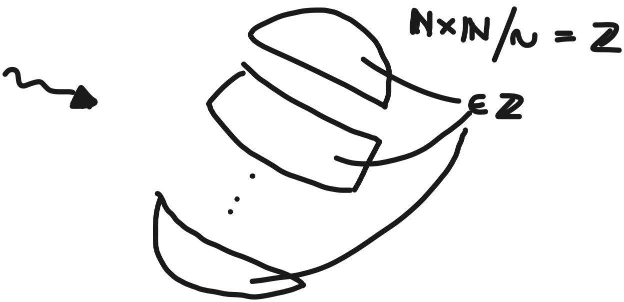
- Lze vytvořit faktorovou množinu

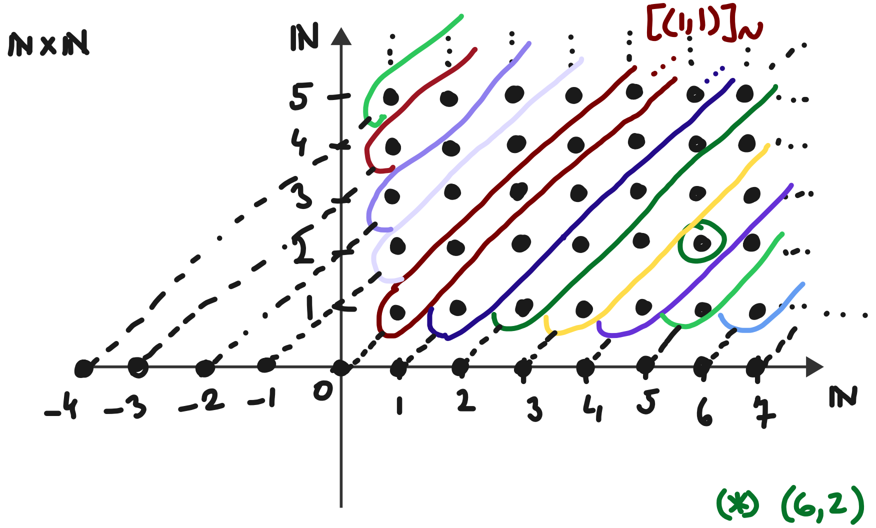
$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim \; = \{[(a,b)]_\sim \mid a,b\in\mathbb{N}\}$$



$(1,2)\sim(2,3)$, protože

$1+3 = 2+2$ ✓





$\mathbb{Z}$ nazýváme množinou celých čísel a prvky $\mathbb{Z}$ jsou zatím třídy ve tvaru

$$[(a,b)]_\sim, \; a,b \in \mathbb{N}.$$

Provedeme ztotožnění:

$$1 \equiv [(2,1)]_\sim$$

" ↪ 2-1 = 1 "

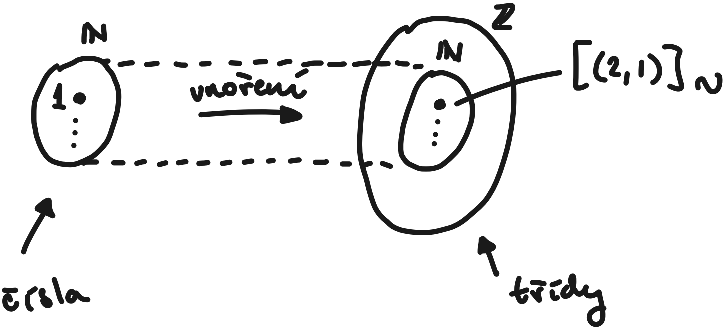
$$2 \equiv [(3,1)]_\sim$$

" ↪ 3-1 = 2 "

$$3 \equiv [(4,1)]_\sim$$

$$4 \equiv [(5,1)]_\sim$$

$$\vdots$$



zavedeme nové symboly pro další prvky $\mathbb{Z}$:

$$0 := [(1,1)]_\sim$$
$$-1 := [(1,2)]_\sim$$
$$-2 := [(1,3)]_\sim$$
$$-3 := [(1,4)]_\sim$$
$$\vdots$$

v tuto chvíli máme

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, \underbrace{1, 2, 3, \ldots}_{\mathbb{N}}\},$$

a proto $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Definice sčítání na $\mathbb{Z}$

Chceme pro 2 čísla $m, n \in \mathbb{Z}$ definovat

$$m+n.$$

Označme

$$m = [(a,b)]_\sim \qquad \ulcorner m = a-b \lrcorner$$

$$n = [(c,d)]_\sim \qquad \ulcorner n = c-d \lrcorner$$

Definujeme

$$m+n = [(\overset{\in \mathbb{N}}{\widehat{a,b}})]_\sim + [(\overset{\in \mathbb{N}}{\widehat{c,d}})]_\sim = [(\overbrace{a+c}^{\in \mathbb{N}}, \overbrace{b+d}^{\in \mathbb{N}})]_\sim$$

$$(a-b) \quad + \quad (c-d) \quad = \quad a+c-(b+d)$$

Př. $m = 2 = [(4,2)]_\sim$
$n = -3 = [(3,6)]_\sim$

$$m+n = 2+(-3) = [(4,2)]_\sim + [(3,6)]_\sim =$$
$$= [(4+3, 2+6)]_\sim = [(7,8)]_\sim = -1$$

Je tato definice korektní, tj. nezávisí náhodou na volbě reprezentantů?

$$2 = [(5,3)]_\sim , \quad -3 = [(6,9)]_\sim$$

$$2+(-3) = [(5+6,\ 3+9)]_\sim = [(11,12)]_\sim = -1$$

Ano, $+$ na $\mathbb{Z}$ je korektní. Pomocí $+$ lze definovat odčítání takto:

$$m-n := m+(-n).$$

Definice násobení na $\mathbb{Z}$

$$m = [(a,b)]_\sim$$
$$n = [(c,d)]_\sim$$

$$m\cdot n = [(a,b)]_\sim \cdot [(c,d)]_\sim \overset{\text{def}}{=} [(ac+bd,\ ad+bc)]_\sim$$

$$(a-b)\cdot(c-d) = ac-ad-bc+bd$$
$$= ac+bd-(ad+bc)$$

Př.

$$3 = [(5,2)]_\sim \qquad \ulcorner 3\cdot(-2) = -6 \lrcorner$$

$$-2 = [(1,3)]_\sim$$

$$3\cdot(-2) = [(5,2)]_\sim \cdot [(1,3)]_\sim = [(5\cdot 1 + 2\cdot 3,\ 5\cdot 3 + 2\cdot 1)]_\sim$$

$$\ulcorner [(a,b)]_\sim \cdot [(c,d)]_\sim \overset{def}{=} [(ac+bd,\ ad+bc)]_\sim \lrcorner$$

$$= [(11,17)]_\sim = -6$$

Tedy $\cdot$ na $\mathbb{Z}$ je korektní, tj. nezávisí na volbě reprezentantů.